Integrales dobles coordenadas polares ejercicios resueltos pdf

If you're seeing this message, it means we're having trouble loading external resources on our website. Si estás detrás de un filtro de páginas web, por favor asegúrate de que los dominios *.kastatic.org y *.kasandbox.org estén desbloqueados. You're Reading a Free Preview Pages 6 to 15 are not shown in this preview. You're Reading a Free Preview Page 19 is not shown in this preview. Definición Hasta el momento hemos tratado con integrales en regiones cartesianas o rectangulares. Ahora veremos las integrales dobles las cuales se van a evaluar en regiones circulares o regiones comprendidas entre dos círculos o una parte de estos círculos. Por ejemplo: Si nos piden la integral doble del circulo sombreado en marrón entonces tendremos que hallar los límites de integración los cuales como vemos en la figura van de -a≤x≤a. Hallando los limites de integración y formulándolos en la integral nos quedaría: Nos encontramos con una integral la cual no resulta tan sencilla de integrar, para facilitar esta integral podemos recurrir a una región polar reduciéndonos la dificultad del cálculo. Para ello se tiene que tener en cuenta que la región circular se obtiene al hacer rotar un segmento de recta en torno al origen del sistema. Para poder realizar la conversión a coordenadas polares deberemos recordar: Entonces, tomando pequeños diferenciales los cuales se aproximan a una región rectangular nos quedaría la siguiente integral: Por lo tanto para encontrar una integral en coordenadas polares se debe. 1. Expresar la región en el sistema polar, y determinar los limites de Integración. 2. Sustituir en la función integrando las coordenadas polares por su equivalente en coordenadas polares. 3. Reemplazar el diferencial de área por su equivalente en coordenadas polares 4. Evaluar la integral resultante. Ejemplo: Loading PreviewSorry, preview is currently unavailable. You can download the paper by clicking the button above. INTEGRALES DOBLES 9 TEMA 1 INTEGRALES DOBLES INTEGBAL DOBLE Definición Sea R una región cerrada y acotada del plano IR?, Sea f:1R2 > IR una función definida sobre la región R. Los pasos que conducen a la definición de integral doble son: 1. Consideramos una cuadrícula que contenga a R siendo Aj ¡=1,...,n rectán- gulos de la cuadrícula, de áreas respectivas AA;, totalmente contenidos en R. 2. Escogemos (x¡, y) punto arbitrario de A; para i =1,...,n. n 3. Calculamos lasuma —) f(x, y)AA, a 4. Consideramos cuadrículas cada vez más finas que contengan a R, de modo que las dimensiones de cada rectángulo tiendan a 0, y el número de rectán- gulos contenidos en R sea cada vez mayor. Entonces definimos: n ll f(x, y) dA ¿lin 2, 1079994 Eunciones integrabl La función escalar de dos variables f definida en la región R cerrada y acotada se dice que es integrable sobre R si y sólo si verifica la existencia del límite anterior y su valor es finito. El valor del límite recibe el nombre de integral doble de f sobre R. INTEGRALES DOBLES 10 ndición suficien integrabilida: Si la función f es continua en la región R cerrada y acotada entonces f es inte- grable sobre R. Interpr ¡ón la 1 ral | (1) Si f(x, y)=1 enR, entonces Área (R) = f 1dA R (2) Si f(x, y)20 en R, entonces [| f(x, y) dA R representa el volumen del sólido de paredes laterales rectas limitado arriba por la superficie z =f (x, y) y abajo por la región R en el plano z =0. z *x (3) Si f(x y) 29 (%, y), entonces ff [ty -9(0% y)]0dA R representa el volumen del sólido limitado entre las superficies z =f(x, y) y z = 9 (x, y), siendo R la región del plano z = O cuya frontera es la proyección de la curva intersección de ambas superficies. ropi la integra! dobi (1) Í) k (xy) 0A = k ff £(x, y) dA ke IR R R (2) Jf [10 +90 y Ida = | 1(x,y)dA + [] 9 (xy) da R R R INTEGRALES DOBLES 13 2. Coordenadas polares descentradas X=X +TC05 0) J(r,6)=r y =y,+rsen8 3. Coordenadas elípticas x=arcos0 mares] J(r,0)=abr 4. Transformaciones lineales x=Au+Bv J(uv)=AD-BC — AD-BCx0 y=Cu+Dv Aplicacion: la integral dobl Supongamos que tenemos un cuerpo plano acotado (lámina de grosor des- preciable), de forma que su masa total está distribuida en forma conocida siguiendo una función de densidad superficial y = y (x, y). Entonces: Masa de R = M(R) = S y (x, y) dx dy R (1) Centro de masas de un cuerpo plano Si denotamos por (Xx, Y) las coordenadas del centro de masas: 9 ena 1-5 ron (2) Momentos de inercia de un cuerpo plano Sea r una recta y denotemos por d (x, y) la distancia de la recta r al punto (x, y) de la región R. El momento de inercia del cuerpo plano respecto a la recta r resulta ser: | = lx, y) 1 (x, y) dx dy En particular, los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados son: INTEGRALES DOBLES 14 yn [tna y + Pénty ara El momento polar de inercia o momento respecto al origen es: lo = [rra = 1, +L, R INTEGRALES DOBLES 15 1.1 1.2 TEMA 1. PROBLEMAS Calcular las siguientes integrales dobles, sobre el rectángulo R que se indica. (a) f[xy+ydA R=(0,1]x [0,1] R tp) Jy+x-3y%hda R=[0,11x[1,3] R (c) sen?x sen*y dA R=[0,x] x[0,x] R (dd) ff tmseny-ye)da R=[-1,1]x[0,12] R Dibujar la región de integración y calcular las siguientes integrales dobles: (a) S x COS (x + y) dA R triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (m,10) R 0 fed R=((y) e IB" / + [yl 0, Calcular el volumen del sólido interior al cilindro x? + y2=2ax ya la esfera x2 + y? +22 = da?, Calcular el volumen del sólido interior a las esferas x2 + y2 + 22= al y x2 + y2 + (2 - a)? = el, Y 2_2 Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide + 5 == y el plano x=a. (a) Calcular el valor del área de la superficie plana exterior a la circunferencia x2 + y2=1 e interior a la cardioide r=1 +cos 6, (b) Encontrar la masa de esta superficie si su densidad superficial es proporcional a la distancia al origen. Calcular las coordenadas del centro de masas de un pétalo de la rosa r=asen28 si su densidad superficial es constante. Calcular los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados del cuerpo delgado plano de contorno x2+ y2=1 para y=0 e y=0, sisu función de densidad superficial es y (Xx, y) = 1+ y. INTEGRALES DOBLES 20 SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL TEMA 1 Calcular las siguientes integrales dobles, sobre el rectángulo R que se 1.1 indica. (a) [Py +y dA R=[0,1] x [0,1] R y s O